فيزياء سنة أولى عام

إن القوة التنافرية F_{13} تصنع زاوية قدرها $45°$ مع المحور x . لذلك، فإن مركبتا هذه القوة على المحورين x و y تكونا متساويتين، وإن قيمة كل منهما تعطى بالعلاقة:

$$F_{13}\cos 45° = 7.9\ \text{N}$$

بتحصيل القوتين F_{13} و F_{23} وفق قواعد الجمع المتجهي، نتوصل إلى قيمة مركبتي القوة المحصلة على المحورين x و y الفاعلتين على q_3:

$$F_{3x} = F_{13x} + F_{23x} = 7.9N + (-9.0N) = -1.1N$$
$$F_{3y} = F_{13y} + F_{23y} = 7.9N + 0 = 7.9N$$

يمكننا أيضاً التعبير عن القوة المحصلة الفاعلة على q_3 بواسطة متجهات الواحدة على المحورين x و y كما يلي:

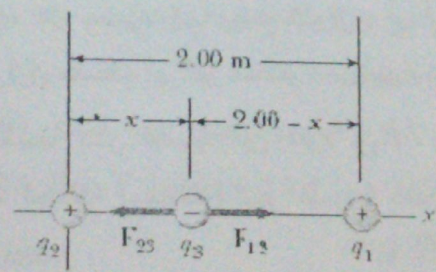
$$F_3 = (-1.1\hat{\imath} + 7.9\hat{\jmath})\text{N}$$

ماذا يحصل؟ ماذا يحصل إذا تبدلت إشارات كل الشحن الثلاث إلى إشارات معاكسة؟ كيف سيكون أثر ذلك على النتيجة من أجل F_3.

الجواب: إن الشحنة q_3 ستبقى متجاذبة إلى الشحنة q_2 ومتنافرة مع q_1 بقوة لها نفس القيمة المطلقة. وبالتالي النتيجة النهائية لـ F_3 ستكون بالضبط هي نفسها.

مثال (23.3) أين ستكون محصلة القوى معدومة؟

ثلاث شحن نقطية تقع على امتداد المحور x، كما هو مبين في الشكل (23.9). حيث إن الشحنة الموجبة $q_1 = 15.0\ \mu C$ تكون موجودة عند $x = 2.00\ m$، من الشحنة الموجبة $q_2 = 6.00\ \mu C$ التي تكون موجودة عند مبدأ الإحداثيات، وحيث إن محصلة القوى الفاعلة على الشحنة السالبة q_3 معدومة. فما هي قيمة الإحداثي الذي تكون موجودة عنده الشحنة q_3؟



الشكل (23.9)، **للمثال** (23.3): ثلاث شحن نقطية متوضعة على امتداد المحور x. إذا كانت القوة المحصلة الفاعلة على q_3 معدومة، فإن القوة F_{13} التي تمارسها الشحنة q_1 على الشحنة q_3 يجب أن تكون مساوية بالقيمة ومعاكس بالاتجاه للقوة F_{23} التي تمارسها الشحنة q_2 على الشحنة q_3؛ أي $F_{13} = -F_{23}$.

85

الحل: بما أن الشحنة q_3 سالبة والشحنتين q_1 و q_2 موجبتين، فإن كلا القوتان F_{13} و F_{23} تكونان تجاذبيتان، كما أشير إلى ذلك في الشكل (23.9). إن القوتان F_{13} و F_{23} لهما، بحسب نص المثال، نفس القيمة، لذلك بتطبيق قانون كولون عليهما نجد:

$$F_{23} = k_e \frac{|q_2||q_3|}{(x)^2} \quad و \quad F_{13} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{(2.00-x)^2}$$

وبالتالي، من أجل أن تكون القوة المحصلة على الشحنة q_3 معدومة، يجب أن تكون القوة F_{23} مساوية بالقيمة المطلقة ومعاكسة بالاتجاه للقوة F_{13}. وبمساواة قيمتي هاتين القوتين نحصل على:

$$k_e \frac{|q_1||q_3|}{(2.00-x)^2} = k_e \frac{|q_2||q_3|}{(x)^2}$$

لاحظ أن كل من k_e و $|q_3|$ موجود في طرفي المساواة، لذلك يمكننا حذفهما، ثم نحل المعادلة الناتجة من أجل x فنجد أن:

$$(x)^2|q_1| = (2.00-x)^2|q_2|$$
$$x^2 \times (15.6 \times 10^{-6}C) = (4.00 - 4.00x + x^2)(6.00 \times 10^{-6}C)$$

وهذه المعادلة يمكن اختصارها إلى معادلة من الدرجة الثانية هي:

$$3.00x^2 + 4.00x + 8.00 = 0$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة لـــ x، سنجد أن لها جذر موجب هو $x = 0.775m$. وأن لها أيضاً جذر ثان سالب هو $x = -3.44m$، وهذا موضع ثان تكون عنده القيمتين المطلقتين للقوتين الممارستين على q_3 متساويتين، إلا أنهما تكونان في نفس الاتجاه.

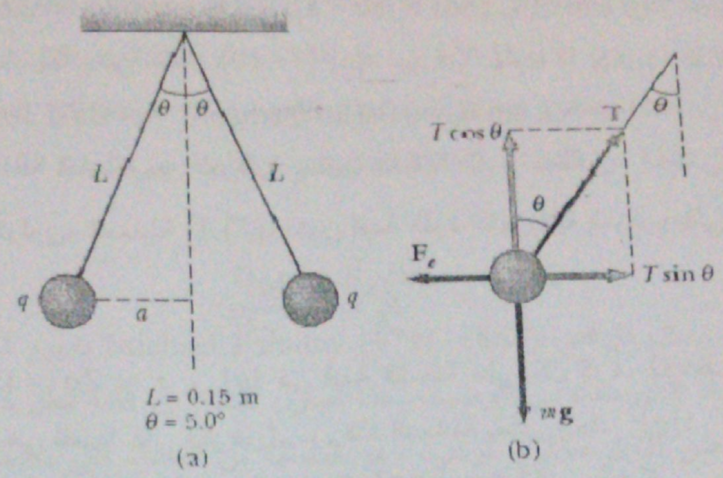
ماذا سيحصل؟. بفرض أن الشحنة q_3 مجبرة على التحرك فقط على امتداد المحور x. وبفرض أنها سُحبت من موضعها الابتدائي $x = 0.775m$ مسافة صغيرة جداً على امتداد المحور x. السؤال: عندما تُحرر (تُترك) q_3، هل ستعود إلى وضع التوازن أم أنها ستنسحب إلى مكان أبعد عن وضع التوازن؟؛ أي، هل التوازن مستقر أم غير مستقر؟. برأيك متى يكون التوازن مستقراً؟.

الجواب: إذا ما حُركت الشحنة نحو اليمين، فإن القوة F_{13} تصبح أكبر، بينما القوة F_{23} تصبح أصغر. وهذا يتسبب بقوة إجمالية (محصلة) نحو اليمين، بنفس جهة الإزاحة. وهكذا، فإن التوازن يكون غير مستقر *unstable*.

لكن إذا ما أجبرت الشحنة على البقاء عند إحداثي x ثابت *fixed* لكن سمح لها بالحركة نحو الأعلى والأسفل في الشكل (23.9)، فإن التوازن يكون مستقراً *stable*. في هذه الحالة، إذا سُحبت الشحنة نحو الأعلى (أو الأسفل) ثم تُركت، فإنها ستعود نحو موضع التوازن وهي تعاني اهتزازاً متخامداً.

مثال (23.4): أوجد الشحنة على الكرة

كرتان صغيرتان متماثلتان لهما نفس الشحنة، كتلة كُلٌّ منهما $3.0 \times 10^{-2} kg$، معلقتان في حالة توازن، كما هو مبين في الشكل (23.10)(a)، إذا كان طول خيط التعليق لكل منهما $0.15\ m$، وكانت الزاوية θ بين الخيطين هي $5.0°$. فأوجد قيمة الشحنة على كل من الكرتين.



الشكل (23.10)، للمثال (23.4):(a) كرتان متماثلتان، كل منهما تحمل نفس الشحنة q، معلقتان في حالة توزان. (b) مخطط الجسم–الحر يبين القوى المؤثرة على الكرة الموجودة على يسار الشكل.

الحل: إن الشكل (23.10) (a) يمكن أن يُساعدنا على استيعاب هذه المسألة، إن الكرتين تُمارسان قوتان تتافريتان على بعضهما البعض، فإذا ما قُربتا إلى بعضهما بعضاً وتُركتا، فإنهما ستتحركان متباعدتان عن المركزِ (الواقع على خط الشاقول) وتستقران على الهيئة التي يبينها الشكل (23.10)(a)، طبعاً، بعد تلاشي التذبذبات المتخامدة الذي سببه مقاومة الهواء. إن عبارة "**في حالة توازن**" هي كلمة مفتاحية تساعدنا على تصنيف هذا المسألة ضمن مسائل التوازن، والتي يمكننا مقاربتها بمسائل التوازن التي في فصل (قوانين الحركة) مع سمة وحيدة إضافية هي أن إحدى القوى المؤثرة على الكرة هي **قوة** كهربائية. يمكننا تحليل هذه المسألة **برسم مخطط الجسم–الحر**؛ أي **مخطط القوى المؤثرة**، على الكرة اليسرى، الذي يبينه الشكل (23.10)(b). في حالة توازن، إن القوى التي تخضع لها هذه الكرة هي: قوة توتر الخيط T، والقوة الكهربائية من الكرة الأخرى F_e، وقوة الثقالة (الجاذبية الأرضية) mg.

بما أن الكرة في حالة توازن، فإن القوى في الاتجاهين الشاقولي والأفقي، كل اتجاه على حدة، يجب أن تكون معدومة؛ أي:

$$\sum F_x = T\sin\theta - F_e = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0 \qquad (2)$$

من المعادلة (2)، نجد أن توتر الخيط $T = mg/\cos\theta$؛ وهكذا، بتعويض توتر الخيط في العلاقة (1) يمكن إلغاء T ، وبالتالي نحصل على علاقة يمكن أن نعين منها قيمة القوة الكهربائية؛ أي:

$$F_e = mg\tan\theta = (3.0 \times 10^{-2}kg)(9.80\,m/s^2) = 2.6 \times 10^{-2}N$$

ومن هندسة المثلث القائم في الشكل (23.10) (a)، نجد أن $\sin\theta = a/L$، لذلك، فإن:

$$a = L\sin\theta = (0.15m)\sin(5.0°) = 0.013m$$

وبالتالي فإن المسافة الفاصلة بين الكرتين ستكون $2a = 0.026m$.

وبحسب قانون كولون، المعادلة (23.1)، تكون قيمة القوة الكهربائية المؤثرة على الكرة هي:

$$F_e = k_e\frac{|q|^2}{r^2}$$

حيث $r = 2a = 0.026m$، و $|q|$ هي قيمة الشحنة على كل كرة. (لاحظ أن الحد $|q|^2$ يظهر هنا لأن الشحنة هي نفسها على الكرتين). من هذه المعادلة يمكن إيجاد $|q|^2$:

$$|q|^2 = \frac{F_e r^2}{k_e} = \frac{(2.6 \times 10^{-2}N)(0.026m)^2}{8.99 \times 10^9 Nm^2/C^2} = 1.96 \times 10^{-15}C^2$$

وبالتالي فإن شحنة كل من الكرتين ستكون:

$$|q| = 4.4 \times 10^{-8}C$$

لإنهاء المسألة، لاحظ أننا أوجدنا فقط قيمة الشحنة $|q|$ على الكرتين. وليس هنالك من طريقة تمكننا من إيجاد إشارة الشحنة اعتماداً على المعلومات المعطاة في المسألة. في الحقيقة، إن إشارة الشحنة ليست هامة. فالحال سيكون هو نفسه تماماً سواء أ كانت الكرتين تحملان شحنتين موجبتين أم سالبتين.

ماذا سيحصل؟ بفرض أن زميل لك طلب منك حلّ هذه المسألة من دون فرضية أن يكون للشحنتين قيمتين متساويتين. وهو يدّعي أن التناظر سيكون مختلاً إذا لم تكن الشحنتان متساويتان، نظراً لأن الخيطان سيصنعان زاويتان مختلفتان مع الشاقول، والمسألة ستكون معقدة أكثر بكثير مسألتنا. ما هو ردك عليه؟

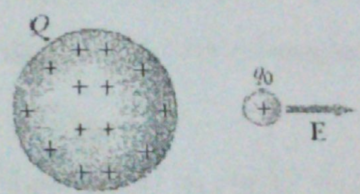
الجواب: يجب أن تجادله (تثبت له) بأنّ التناظر لن يكون مختلاً وأن الزاويتين ستبقيان من دون تغيير. فقانون نيوتن الثالث يقتضي بأنّ القوتين الكهربائيتينّ المؤثرتين على كلا الكرتين ستكونان متساويتين، وذلك بغض النظر عن تساوي أو عدم تساوي شحنتيهما. وبالتالي، فإن الحلّ لهذا المثال سيبقى من دون تغيير حتى مرحلة حسابِ $|q|^2$. لكن في هذه الحالة، إن قيمة $|q|^2$؛ أي $1.96 \times 10^{-15}C^2$ ستمثل جداء الشحنتين q_1q_2، حيث إن q_1 و q_2 هما قيمتا الشحنتان على الكرتين. على كل حال، إن التناظر سيختل فقط إذا كانت كتلتي الكرتين غير متساويتين، في هذه الحالةِ، فإن الخيطان سيصنعان مع الشاقول زاويتان مختلفتان، وعندئذ فعلاً المسألة ستكون أكثر تعقيداً.

23.4. الحقل الكهربائي

هنالك قوتان حقليتان (لهما منطقة تأثير) نمهد عادة بهما شرحنا للحقل الكهربائي، هما قوة الجاذبية الأرضية التي سبق الحديث عنها في الفيزياء العامة 1، والقوة الكهربائية التي نشرحها في هذا الفصل. كما أشير سابقاً (في الفيزياء العامة 1)، إن القوى الحقلية لجسم ما هي تلك القوى التي تنشأ عنه والتي يمكنها إحداث أفعال على الأجسام الأخرى عبر الفضاء؛ أي تلك القوى التي تُبدي أفعالاً تبادليةً حتى عندما لا يكون هنالك تماس فيزيائي فيما بين الأجسام. لقد عرفنا (في الفقرة ()) حقل الجاذبية الأرضية g في نقطة من الفضاء بأنه قوة الجاذبية F_g الفاعلة على الجسم المُختبر مقسومة على كتلة هذا الجسم m؛ أي:

$$g \equiv F_g/m.$$

لقد عمم مايكل فارادي Michael Faraday (1791–1867) مفهوم الحقل هذا ليشمل أيضاً القوى الكهربائية، الذي سنكرس لتوضيحه عدة فصول قادمة. إن كلمة **حقل كهربائي** في الاستخدام لها معنيان، **المعنى الأول** مجازي نوعي، وهو المنطقة من الفضاء التي تحيط بالجسم المشحون (أو جسم مشحون) (أو الشحنة–المُصدرة) والتي تظهر فيها الأفعال (أو تأثيرات المتبادلة) للقوى الكهربائية. فعند وقوع جسم مشحون – **شحنة اختبارية**– في الحقل الكهربائي لجسم ثان مشحون–مُصدر، فإن هذا الجسم سيتأثر بالقوة الكهربائية للجسم الثاني، كحال شحنة اختبارية صغيرة موجبة q_0 وضعت بالقرب من جسم ثان يحمل شحنة موجبة Q أكبر بكثير من q_0، كما يُظهر ذلك الشكل (23.11).



الشكل (23.11): شحنة موجبة اختبارية صغيرة q_0 موضوعة قرب جسم يحمل شحنة موجبة أكبر بكثير Q تمارس حقلاً كهربائياً يتجه كما هو مبين.

والمعنى الثاني دقيق كمي، وفيه نعرّف الحقل الكهربائي العائد إلى شحنة–مُصدرة عند الموضع الذي توجد فيه شحنة اختبارية بأنه القوة الكهربائية المؤثرة على الشحنة اختبارية بوحدة الشحنة، واحدة أو نعرفه بشكل أدق كما يلي:

تعريف الحقل الكهربائي:

نُعرف متجهة الحقل الكهربائي E عند نقطة ما في الفضاء بأنه القوة الكهربائية F_e المؤثرة على شحنة اختبارية موجبة q_0 موضوعة عند تلك النقطة مقسومةً على قيمة الشحنة الاختبارية q_0؛ أي:

$$E \equiv F_e/q_0 \qquad (23.7)$$

لاحظ بأن E هو الحقل الكهربائي الناتج عن شحنة أولى (أو عن توزع شحني) منفصلة عن الشحنة الاختبارية، وبأن هذا الحقل يختلف عن الحقل الكهربائي الناتج عن شحنة الاختبارية نفسها عند موضع الشحنة الأولى.

ولاحظ أيضاً بأن وجود حقل كهربائي هو خاصة للشحنة-المُصدرة، وأن وجود الشحنة الاختبارية ليس ضرورياً لكي يتخلق الحقل من الشحنة الأولى-المُصدرة. فالشحنة الاختبارية ليست سوى كاشف للحقل الكهربائي الناتج عن الشحنة الأولى.

23.7

يمكن إعادة ترتيب العلاقة (23.8) كما يلي: x

$$F_e = qE \qquad (23.8)$$

حيث إننا استعملنا الرمز العام للشحنة q. إن هذه المعادلة تعطينا القوة المؤثرة على جسيم مشحون موضوع في حقل كهربائي E. إذا كانت الشحنة q موجبة، فإن القوة والحقل يكونان بنفس الاتجاه، وإذا كانت الشحنة q سالبة، فإن القوة والحقل يكونان باتجاهين متعاكسين. لاحظ التشابه بين المعادلة (23.8) والمعادلة المماثلة من أجل جسيم ذو كتلة m موضوع في حقل التجاذب الكتلي $F = mg$،

تحذير (23.1): صحيحةٌ فقط من أجل الجسيمات

إن المعادلة (23.8) صحيحة فقط من أجل الجسيمات المشحونة؛ حيث نقصد هنا بالجسيم أيَّ جسم له حجم صفري (معدوم). فمن أجل جسم ذي حجم محدود غير معدوم في حقل كهربائي، فإن للحقل يمكن أن يتفاوت في القيمة والاتجاه على امتدادات الحجم لهذا الجسم، والمعادلة الموافقة عندئذ ستكون أكثر تعقيداً.

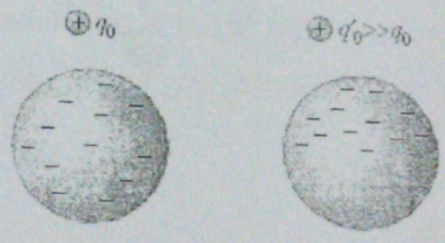
إن وحدة متجهة الحقل E في الجملة الدولية هي نيوتن على كولون (N/C). وإن اتجاه متجهة الحقل E، كما هو مبين في الشكل (23.11)، هو نفس اتجاه القوة التي تُمارس على شحنة اختبارية موجبة لدى وضعها في الحقل. إذن يمكننا القول أنه **يوجد حقلٌ كهربائيٌ عند نقطة ما إذا ما مُورس على شحنة اختبارية عند تلك النقطة قوةٌ كهربائيةٌ**. من الواضح أنه بمعرفة قيمة واتجاه الحقل الكهربائي في نقطة ما، فإن القوة الكهربائية التي تُمارس على أي جسيم مشحون عند تلك النقطة يمكن حسابها من المعادلة (23.8).

يقدم الجدول (23.2) قيم الحقل الكهربائي من أجل مصادر (منابع) حقلية متنوعة. أنبوبة إضاءة فلورية (لمبة نيون)، الغلاف الجوي (طقس لطيف)، بالون مدلوك بالشعر، الغلاف الجوي (بوجود سحابة رعدية)، النسخ أو التصوير الضوئي، شرارة في الهواء، المحيط القريب للإلكترون في ذرة هيدروجين.
الشحنة

الجدول (23.2): قيم نموذجية للحقل الكهربائي.

Source	E (N/C)
Fluorescent lighting tube	10
Atmosphere (fair weather)	100
Balloon rubbed on hair	1 000
Atmosphere (under thundercloud)	10 000
Photocopier	100 000
Spark in air	>3 000 000
Near electron in hydrogen atom	5×10^{11}

عند استعمالنا للمعادلة (23.7)، يجب علينا أن نفترض بأن قيمة الشحنة الاختبارية q_0 هي صغيرة بما يكفي حتى لا تُفسد ترتيب توزع الشحنة المسؤولة عن الحقل الكهربائي (المصدرة). فإذا ما وضعت شحنة صغيرة للغاية بالقرب من كرة معدنية مشحونة بصورة منتظمة، كما هو مبين في الشكل (23.12)(a)، فإن الشحن على الكرة المعدنية، التي تنتج الحقل الكهربائي، تبقى متوزعة بانتظام كما كانت. لكن إذا كانت الشحنة الاختبارية كبيرة بما يكفي ($\acute{q}_0 \gg q_0$)، كما هو مبين في الشكل (23.12)(b)، فإنها تسبب إعادة توزع الشحن على الكرة المعدنية، وعندئذ، فإن نسبة القوة إلى الشحنة إلى الاختبارية ستتغير ($\acute{F}_e/\acute{q}_0 \neq F_e/q_0$). وذلك، لأنه بسبب إعادة توزع الشحن على الكرة المعدنية، يتخلق حقل كهربائي مختلف عن الحقل الكهربائي بوجود شحنة اختبارية أصغر بكثير.



(a) (b)

الشكل (23.12): **(a)** من أجل شحنة اختبارية q_0 صغيرة بما يكفي، يبقى ترتيب توزع الشحن على الكرة كما هو (لا يتغير)، **(b)** وعندما تكون الشحنة الاختبارية $\acute{q}_0$ أكبر من q_0، يصبح توزع الشحن على الكرة مغايراً لما كان عليه بالأصل (يتغير) نتيجةً لقرب الكرة المكاني من الشحنة الاختبارية $\acute{q}_0$.

لتعيين اتجاه الحقل الكهربائي، لندرس شحنة نقطية نعتبر أنها شحنة-مُصدرة. إن الشحنة-المصدرة هذه تخلق حقلاً كهربائياً في كل نقطة من الفراغ الذي يحيط بها. ولنضع شحنة-اختبارية a عن الشحنة-المصدرة، كما هو مبين في الشكل (23.13) r تبعد مسافة P في نقطة ما)، ولنتصور أننا نستخدم الشحنة الاختيارية لتعيين اتجاه القوة الكهربائية، ومن ثم اتجاه الحقل الكهربائي. على كل حال، إن الحقل الكهربائي لا يتوقف على وجود الشحنة الاختبارية؛ لكونه ينشأ من الشحنة المصدرة q على الشحنة الاختبارية q_0 هي ~~فقط~~ q. بحسب قانون كولون، إن القوة التي تمارسها الشحنة

Scanned by CamScanner

$$F_e = k_e \frac{q q_0}{r^2} \hat{r}$$

حيث إن $\hat{r}$ هو متجهة الوحدة الموجهة من q إلى q_0. إن هذه القوة في الشكل (23.13)(a) موجهة مبتعدة عن الشحنة-المصدرة q. بما أن الحقل الكهربائي عند P، موضع الشحنة الاختبارية، يعرف بالعلاقة:

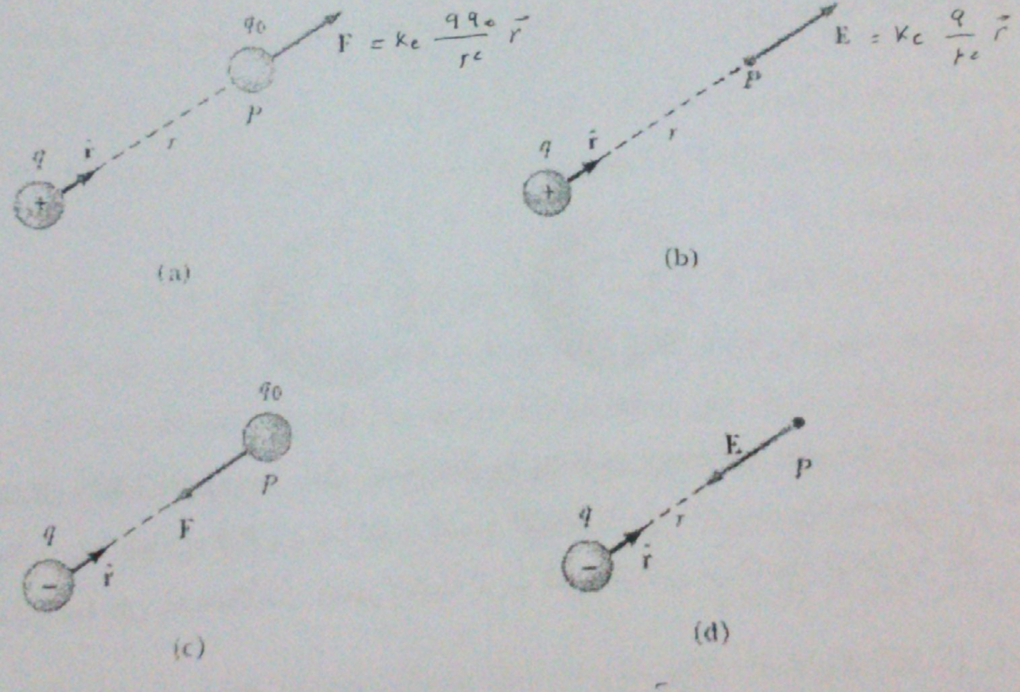
$$E = F_e / q_0$$

فإن الحقل الكهربائي الذي تخلقه الشحنة q عند P يكون:

$$E = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} \qquad (23.9)$$

إذا كانت الشحنة-المصدرة موجبة، يبين الشكل (23.13)(b) الحالة التي تكون فيها الشحنة الاختبارية مستبعدة (غير موجودة)، فإن الشحنة-المصدرة تخلق حقلاً كهربائياً عند النقطة P، اتجاهه مبتعداً عن الشحنة q.

إذا كانت الشحنة q سالبة، كما هو مبين في الشكل (23.13)(c)، فإن القوة المؤثرة على الشحنة الاختبارية تكون موجهاً إلى الشحنة المصدرة، وكذلك الحقل الكهربائي عند P يكون أيضاً موجهاً إلى الشحنة المصدرة، كما هو مبين في الشكل (23.13)(d).



موجبة

الشكل (23.13): شحنة اختبارية q_0 عند نقطة P تبعد مسافة r عن الشحنة النقطية q. (a) إذا كانت الشحنة النقطة q موجبة، فإن القوة المؤثرة على الشحنة الاختبارية ستكون موجهة نحو الجهة البعيدة بالنسبة للشحنة q. (b) من أجل شحنة-مصدرة موجبة، يكون الحقل الكهربائي عند P يتجه وفق نصف القطر المتجهي (الشعاعي) نحو الخارج بالنسبة للشحنة q. (c) إذا كانت الشحنة النقطة q سالبة، فإن القوة المؤثرة على الشحنة الاختبارية ستكون موجهة نحو الجهة القريبة بالنسبة للشحنة الشحنة النقطة q. (d) من أجل شحنة-مصدرة سالبة، يكون الحقل الكهربائي عند P يتجه وفق نصف القطر المتجهي نحو الداخل بالنسبة للشحنة q.

حساب الحقل الكهربائي الناتج عن مجموعة من الشحن

لحساب الحقل الكهربائي العائد إلى مجموعة من الشحن النقطية عند نقطة ما P، نحسب أولاً متجهات الحقل الكهربائي عند P باستخدام المعادلة (23.9) بشكل منفرد (كل على حدة)، ثم نجرى لها جمع متجهي. بكلام آخر، عند أي نقطة P، يكون الحقل الكهربائي الكليّ العائد إلى مجموعة الشحن المصدرة مساوٍ إلى مجموع متجهات الحقول الكهربائية لكافة الشحن.

إن مبدأ التراكب (الجمع) superposition هذا الذي يطبق على الحقول ينتج مباشرة من خاصية تراكب superposition القوى الكهربائية، الذي، بدوره، ينتج من حقيقة أننا نعلم بأنّ القوى تجمع كمتجهات من الفصل الخامس (الفيزياء العامة 1). وبالتالي، فإن الحقل الكهربائي، في النقطة P، العائد إلى مجموعة من الشحن-المُصدرة يمكن أن يُعبر عنه كجمع متجهي بالعلاقة.

$$E = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \qquad (23.10)$$

الحقل الكهربائي العائد إلى عدد منته من الشحن النقطية

حيث r_i هي المسافة من الشحنة-المصدرة q_i ذات الرقم i إلى النقطة P، و $\hat{r}_i$ هو متجهة الوحدة الموجهة من q_i نحو P.

اختبار سريع (23.6):

شحنة اختبارية قيمتها $+3\mu C$ موجودة عند نقطة ما P حيث يكون هنالك حقل كهربائي خارجي يتجه إلى اليمين له القيمة $4 \times 10^6\ N/C$. إذا ما استبدلت الشحنة الاختبارية $+3\mu C$ بشحنة اختبارية أخرى $-3\mu C$، فإن الحقل الكهربائي الخارجي عند النقطة P

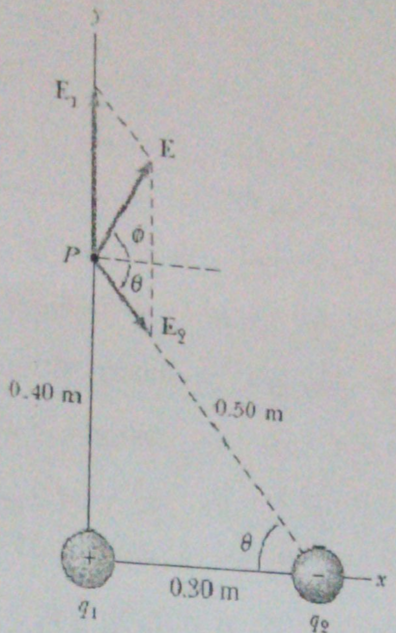
(a) لن يتأثر مطلقاً

(b) ينعكس اتجاهه

(c) يتغير بطريقة ما لا يمكن تعيينها.

مثال (23.5): الحقل الكهربائي العائد إلى شحنتين

شحنتان، إحداهما $q_1 = 0.7\ \mu C$ موضوعة عند مبدأ الإحداثيات، والثانية $q_2 = -5.0\ \mu C$ موضوعة على المحور x، على بعد $0.30\ m$ من مبدأ الإحداثيات، الشكل (23.14). أوجد الحقل الكهربائي الكلي (الناتج عن الشحنتين) عند نقطة P إحداثياتها هي $(0, 0.40)m$.



الشكل (23.14)؛ للمثال (23.5): الحقل الكهربائي الكلي $\boldsymbol{E}$ عند النقطة P يساوي المجموع المتجهي للحقلين $\boldsymbol{E_1}$ ، $\boldsymbol{E_2}$؛ أي $\boldsymbol{E_1 + E_2}$، حيث $\boldsymbol{E_1}$ هو الحقل العائد إلى الشحنة الموجبة q_1، و $\boldsymbol{E_2}$ هو الحقل العائد إلى الشحنة السالبة q_2.

$$E_1 = k_e \frac{|q_1|}{{r_1}^2}$$

$$= (8.99 \times 10^9 N\,m^2/C^2) \frac{(7.0 \times 10^{-6} C)}{(0.40m)^2} = 3.9 \times 10^5 N/C$$

$$E_2 = k_e \frac{|q_2|}{{r_2}^2}$$

$$= (8.99 \times 10^9 N\,m^2/C^2) \frac{(5.0 \times 10^{-6} C)}{(0.50m)^2} = 1.8 \times 10^5 N/C$$

الحل:

بحسب نص المسألة يجب أن تكون المسافة بين الشحنة q_2 والنقطة P تساوي إلى:

$$\sqrt{0.30^2 + 0.40^2} = 0.50\,m$$

أولاً لنوجد قيمة الحقل الكهربائي عند النقطة P العائد إلى كل شحنة على حدة.

إن قيمة الحقل E_1 العائدة إلى الشحنة الموجبة $q_1 = 0.7\,\mu C$ هي:

$$E_1 = k_e \frac{|q_1|}{{r_1}^2}$$

$$= (8.99 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2)\frac{(7.0 \times 10^{-6}C)}{(0.40m)^2} = 3.9 \times 10^5\, N/C$$

وقيمة الحقل E_2 العائدة إلى الشحنة السالبة $q_2 = -5.0\,\mu C$ هي:

$$E_2 = k_e \frac{|q_2|}{{r_2}^2}$$

$$= (8.99 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2)\frac{(5.0 \times 10^{-6}C)}{(0.50m)^2} = 1.8 \times 10^5\, N/C$$

إن متجهة الحقل $\boldsymbol{E_1}$ لها مركبة فقط مركبة على المحور y.

$$\boldsymbol{E_1} = 0 + 3.9 \times 10^5 \hat{\jmath}\, N/C$$

أما متجهة الحقل $\boldsymbol{E_2}$ فلها مركبتين؛ مركبة موجبة على x تعطى قيمتها بالعلاقة:

$$E_{2x} = E_2 \cos\theta = \frac{3}{5}E_2،$$

ومركبة سالبة على y تعطى قيمتها بالعلاقة:

$$E_{2y} = -E_2 \sin\theta = -\frac{4}{5}E_2.$$

وبناء عليه، يمكننا التعبير عن متجهة الحقل $\boldsymbol{E_2}$ كما يلي:

$$\boldsymbol{E_2} = 1.1 \times 10^5 \hat{\imath}\, N/C - 1.4 \times 10^5 \hat{\jmath}\, N/C$$

إن الحقل المحصل $\boldsymbol{E}$ عند P هو تركيب للمتجهتين $\boldsymbol{E_1}$ و $\boldsymbol{E_2}$: أي:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E_2} = (1.1 \times 10^5 \hat{\imath} + 2.5 \times 10^5 \hat{\jmath})\, N/C$$

من هذا النتيجة، تجد بأن الزاوية التي يصنعها $\boldsymbol{E}$ مع المحور x الموجب هي $\phi = 66°$، ويمتلك قيمة قدرها $2.7 \times 10^5\, N/C$.

$$E = \sqrt{(1.1 \times 10^5)^2 + (2.5 \times 10^5)^2}$$
$$= \sqrt{1.21 + 6.25} \times 10^5 = 7.46 \times 10^5$$
$$= 2.73 \times 10^5 N/C$$

مثال (23.6): الحقل الكهربائي لثنائي قطب

يعرف ثنائي القطب الكهربائي بأنه شحنتين متساويتين بالقيمة متعاكستين بالإشارة $(q, -q)$ تفصل بينهما مسافة $2a$. أوجد، من أجل ثنائي القطب المبين في الشكل (23.15)، الحقل الكهربائي $\boldsymbol{E}$ العائد إلى ثنائي القطب عند نقطة P تبعد مسافة y عن مبدأ الإحداثيات أكبر بكثير من a $(y \gg a)$.

وبما أن $y \gg a$، فإنه يمكننا إهمال a^2 بالمقارنة مع y^2، وبالتالي يكون:

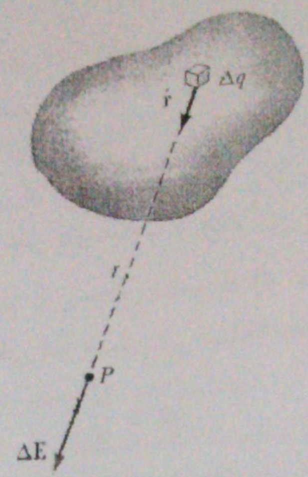
$$E \approx k_e \frac{2qa}{y^3}$$

وهكذا، نرى أنه عند مسافة بعيدة عن ثنائي القطب، لكنها تقع على امتداد المنصف العمودي للخط الواصل بين الشحنتين، يكون التغير في قيمة الحقل الكهربائي المتولد عن ثنائي القطب متناسب مع $1/r^3$، بينما يكون التغير في قيمة الحقل الكهربائي المتولد عن شحنة نقطية وحيدة أكثر بطءً لأنه يتناسب مع $1/r^2$، انظر المعادلة (23.9). وهو أكثر بطءً لأنه عند نقاط بعيدة، يلغي حقلي الشحنتين المتساويتين بالقيمة والمتعاكستين بالإشارة بعضهما بعضاً. إن تابعية حقل ثنائي قطب كهربائي لـ $1/r^3$ يمكن الحصول عليه أيضاً من أجل أي نقطة بعيدة تقع على امتداد المحور x، انظر المسألة (22)، وكذلك من أجل أي نقطة بعيدة بأي اتجاه على العموم. إن ثنائي القطب الكهربائي هو نموذج جيد عن العديد من الجزيئات، مثل جزيئة حمض كلور الماء (HCl)، كما أنه نموذج جيد أيضاً عن كافة الذرات والجزيئات المحايدة الموضوعة في حقل كهربائي خارجي، فهي جميعاً تتصرف كثنائيات أقطاب مادامت خاضعة للحقول الخارجية. وعلاوة على ذلك، إن كافة الجزيئات الشاردية، مثل (HCl)، هي ثنائيات-قطب بشكل دائم من دون أن تخضع لحقول خارجية. إن تأثير ثنائيات قطب كهذه على سلوك مواد تخضع لحقل كهربائي مشروح في الفصل 26.

23.5. الحقل الكهربائي لتوزع شحني مستمر

في أغلب الأحيان تكون المسافات فيما بين شحن مجموعة شحنية (منظومة شحن) أصغر بكثير من بعد هذه المجموعة عن النقطة المدروسة (مثلاً، النقطة التي نحسب فيها الحقل الكهربائي). في مثل هذه الحالات، يمكن نمذجة منظومة الشحن (النظر إلى) وكأنها مستمرة. بمعنى أن منظومة الشحن التي تكون منفصلة بفراغات صغيرة تكافئ شحنة كلية تتوزع بصورة مستمرة (توزع شحني مستمر)، إما على امتداد خطٍ، أو امتداد سطحٍ، أو في كافة أنحاء حجمٍ.

لتقدير الحقل الكهربائي الناشئ عن توزع شحني مستمر عند نقطة ما P، نقوم بالإجراءات التالية: أولاً، نُقسّمُ التوزع الشحني المستمر إلى عناصرٍ صغيرة، يحوي كلّ منها على شحنة صغيرة Δq، كما هو مبين في الشكل (23.16)، ثم، نستخدم المعادلة (23.9) لحساب الحقل الكهربائي العائد إلى أحد العناصر هذه عند نقطة P، أخيراً، نقدر الحقل الكهربائي الكليّ عند النقطة P العائد إلى التوزيعِ الشحني المستمر من خلال جَمْع متجهي لإسهامات كافة عناصر الشحنة في الحقل من خلال تطبيق مبدأ التراكب superposition.



الشكل (23.16): إن الحقل الكهربائي، عند نقطة ما P، العائد إلى توزع شحني مستمر هو المجموع المتجهي للحقول ΔE العائدة إلى كافة عناصر الشحنة Δq في التوزع الشحني.

إن الحقل الكهربائي عند النقطة P العائد إلى عنصر شحنة واحد يَحملُ شحنة Δq يكون:

$$\Delta \boldsymbol{E} = k_e \frac{\Delta q}{r^2} \hat{\boldsymbol{r}}،$$

حيث r هي المسافة من عنصر الشحنة إلى النقطة P، و $\hat{\boldsymbol{r}}$ هو متجه الوحدة الموجهة من عنصر الشحنة نحو النقطة P.

إن الحقل الكهربائي الكلي العائد إلى كافة عناصر الشحنة في التوزع الشحني بصورة تقريبية يكون:

$$\boldsymbol{E} \approx k_e \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{\boldsymbol{r}}_i،$$

حيث إن الدليل i يشير إلى العنصر ذي رقم i في التوزع. وبما أن التوزع الشحني يُنمذج (يُنظر إليه) كتوزع مستمر، فإن الحقل الكلي عند النقطة P سيتحول إلى تكامل عندما ينتهي Δq_i إلى الصفر؛ أي:

$$\boldsymbol{E} = k_e \lim_{\Delta q_i \to 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{\boldsymbol{r}}_i = k_e \int \frac{dq}{r^2} \hat{\boldsymbol{r}} \qquad (23.11)$$

حيث إن التكامل يمتد على التوزع الشحني كلية. وهذا (أي التكامل) هو عملية متجهية يجب معالجتها (حسابها) بصورة ملائمة.

إن هذا النوع من الحساب سنقوم بتوضيحه من خلال مجموعة من الأمثلة، التي سنفترض فيها أن الشحن تكون متوزعة بانتظام، إما على خط أو على سطح أو في كافة أنحاء الحجم. عند إجراء مثل هذا الحساب، من الملائم استخدام مفهوم **كثافة الشحنة** ***charge density*** بحسب التعريفات التالية:

إذا كانت شحنة ما Q متوزعة بانتظام في كافة أنحاء جسم ما حجمه V، فإننا نعرف الكثافة الحجمية للشحنة لجسم بأنها نسبة شحنة هذا الجسم إلى حجمه:

$$\rho \equiv \frac{Q}{V}$$

حيث تمتلك ρ وحدات: كولون على متر مكعب (C/m^3).

وإذا كانت شحنة ما Q متوزعة بانتظام على سطح الجسم A (أو جسم سطحي)، فإننا نعرف الكثافة السطحية للشحنة بأنها نسبة الشحنة على هذا السطح إلى مساحة سطحه:

$$\sigma \equiv \frac{Q}{A}$$

حيث تمتلك σ وحدات: كولون على متر مربع (C/m^2).

وإذا كانت شحنة ما Q متوزعة بانتظام على خطٍ من الجسم طوله ℓ (أو جسم خطي)، فإننا نعرف الكثافة الخطية للشحنة بأنها:

$$\lambda \equiv \frac{Q}{\ell}$$

حيث تمتلك λ وحدة كولون على متر (C/m).

وبناء عليه، إذا كانت شحنة ما Q متوزعة بصورة ~~غير~~ منتظمة على امتداد خط أو سطح أو حجم، فإن كمية الشحنة dq في عنصر طول أو سطح أو حجم تكون: X

$$dq = \rho\, dV \quad dq = \sigma\, dA \quad dq = \lambda\, d\ell$$

توجيهات حول حل المسائل التي يُطلب فيها إيجاد الحقل الكهربائي:

الوحدات: في الحسابات التي يستخدم فيها ثابت كولون $k_e(= 1/4\pi\epsilon_0)$، حتماً يجب التعبير عن الشحن بالكولون (C) والمسافات بالمتر (m).

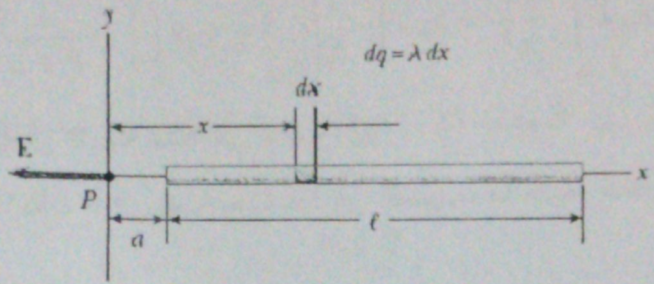
حساب الحقل الكهربائي لشحن نقطية: لإيجاد الحقل الكهربائي الكلي عند نقطة معطاة، أولاً احسب الحقل الكهربائي، عند تلك نقطة، الذي يعود إلى كل شحنة على حدة (بمفردها). عندئذ، يكون الحقل المحصل عند تلك النقطة مساوٍ للمجموع المتجهي للحقول العائدة إلى الشحن المفردة.

التوزعات الشحنية المستمرة: عندما تواجه مسائلاً تتضمن توزعاً مستمراً للشحن، فإنه، من أجل تقدير الحقل الكهربائي الكلي عند نقطة ما، يجب عليك استبدال المجموع المتجهي بتكامل متجهي. ثم عليك أن تقسم التوزع المستمر إلى أجزاء متناهية في الصغر، ثم أن تحسب المجموع المتجهي بإجراء مكاملة على امتداد التوزع الشحني كليةً. إن الأمثلة التالية (23.7) و (23.8) و (23.9) توضح هذه التقانة (المنهج في الحساب).

التناظر: في كل من توزعات الشحن النقطية والتوزعات الشحنية المستمرة، استفد من أي تناظر موجود في المنظومة من أجل تسهيل عملية الحساب.

مثال (23.7) الحقل الكهربائي العائد لقضيب مشحون

قضيب طوله ℓ يمتلك شحنة موجبة منتظمة (موزعة بانتظام) على وحدة الطول λ وشحنته الكلية Q. احسب قيمة الحقل الكهربائي عند نقطة P تقع على امتداد محور القضيب وتبعد مسافة قدرها a عن إحدى نهايتيه، الشكل (23.17).



الشكل (23.17)؛ للمثال (23.7): الحقل الكهربائي العائد لقضيب مشحون بانتظام يمتد على المحور x عند نقطة P تقع على امتداد المحور x. إن قيمة الحقل العائدة إلى شريحة ذات شحنة dq عند نقطة P تبعد عنها مسافة x هي $k_e(dq/x^2)$. وإن الحقل الكلي عند النقطة P هو المجموع المتجهي للحقول من كافة شرائح القضيب.

الحل: لنفرض أن القضيب يقع على المحور x، وأن dx هو طول شريحة صغيرة منه، وأن dq هي الشحنة على تلك الشريحة. بما أن القضيب يمتلك شحنة بوحدة الطول قدرها λ، فإن الشحنة dq التي على الشريحة الصغيرة ستكون:

$$dq = \lambda\, dx$$

إن الحقل dE عند النقطة P العائد إلى هذه الشريحة سيكون في الاتجاه السالب للمحور x (لأن مصدر الحقل يحمل شحنة موجبة)، وقيمته ستكون:

$$dE = k_e \frac{dq}{x^2} = k_e \frac{\lambda dx}{x^2}$$

بما أن كل عنصر آخر (شريحة أخرى) ينتج أيضاً حقلاً في الاتجاه السالب للمحور x، فإن مسألة جمع اسهاماتها يكون سهلاً واضحاً في هذه الحالة. إن الحقل الكلي عند النقطة P العائد إلى كافة شرائح (عناصر) القضيب، التي تبعد مسافات مختلفة عن النقطة P، تعطى بالمعادلة (23.11)، التي في هذه الحالة تصبح[1] كما يلي:

---

[1] من المهم أن تعرف كيف تجري مثل هذه التكاملات. أولاً، عبر عن عنصر الشحنة dq بدلالة المتغيّرات الأخرى في التكامل. (في هذا المثال، هنالك متغيّر واحدة هو x، ولذلك عبرنا عن المتغير بدلالته كما يلي $dq = \lambda\, dx$). يجب أن يُجرى التكامل على كميات سلمية scalar quantities لذلك، عليك أن تحدد الحقل الكهربائي بدلالة مركباته، إذا كان ذلك ضرورياً، (في هذا المثال، يمتلك الحقل مركبة على x

$$E = \int_{a}^{\ell+a} k_e \lambda \frac{dx}{x^2}$$

حيث إن حدود التكامل تمتد من أحد طرفي القضيب $(x = a)$ حتى الطرق الآخر $(x = \ell + a)$. إن الثابتين k_e و λ يمكن إخراجهما من التكامل:

$$E = k_e \lambda \int_{a}^{\ell+a} \frac{dx}{x^2} = k_e \lambda \left[-\frac{1}{x}\right]_{a}^{\ell+a} = k_e \lambda \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\ell + a}\right) = \frac{k_e Q}{a(\ell + a)}$$

حيث استخدمنا حقيقة أن الشحنة الكلية هي $Q = \lambda \ell$.

ماذا سيحصل؟: بفرض أننا نقلنا P إلى نقطة بعيدة جداً عن القضيب، ما طبيعة الحقل الكهربائي عند مثل هذه النقطة؟

الجواب:

إذا كانت النقطة P بعيدة عن القضيب $(a \gg \ell)$، فإن ℓ في مقام كسر علاقة E النهائية يمكن أن تُهمل، وبالتالي فإن:

$$E \approx \frac{k_e Q}{a^2}$$

وهذا هو تماماً الشكل الذي نتوقعه لشحنة نقطية. لذلك، عند قيم كبيرة للنسبة a/ℓ، فإن توزع الشحنة يبدو وكأنه شحنة نقطية ذات قيمة Q، فنحن على بعد كبير جداً لا يمكننا تمييز أن القضيب يمتلك حجماً (أبعاداً). إن استخدام تقانة النهايات limiting technique $(a/\ell \to \infty)$ غالباً ما يكون جيداً من أجل فحص العلاقة الرياضية.

وظيفة: احسب قيمة الحقل الكهربائي عند نقطة P تقع على امتداد محور معامد للقضيب في منصفه وتبعد مسافة قدرها a.

مثال (23.8): الحقل الكهربائي لحلقة ذات شحنة منتظمة

حلقة ذات نصف قطر a تحمل شحنة كلية Q موجبة متوزعة بانتظام. احسب الحقل الكهربائي العائد إلى الحلقة عند نقطة P تقع على بعد x من مركزها، وعلى امتداد محور مركزي عمودي على مستوي الحلقة، الشكل $(23.18)(a)$.

فقط، لذلك لن يربكنا هذا التفصيل) ثم، خفض معادلتك إلى تكامل على متغيّر وحيدة (أو إلى عدة تكاملات، كلٌ منها على متغيّر وحيد). في الأمثلة التي تمتلك تناظرٌ كروي أو اسطواني، المتغيّر الوحيدة سيكون هو الإحداثي النصف القطري radial coordinate.

ماذا سيحصل؟ افرض أن شحنة سالبة موضوعة عن مركز الحلقة في الشكل (23.18) ثم أزيحت ببطء بمسافة $x \ll a$ على امتداد المحور x. وعندما تتحرر هذه الشحنة، ما هو نوع الحركة التي ستبديها؟.

الجواب: في علاقة الحقل العائد إلى الحلقة المشحونة، لنفرض أن $x \ll a$، عندئذ، فإن النتيجة ستكون:

$$E_x = \frac{k_e x}{a^3} Q$$

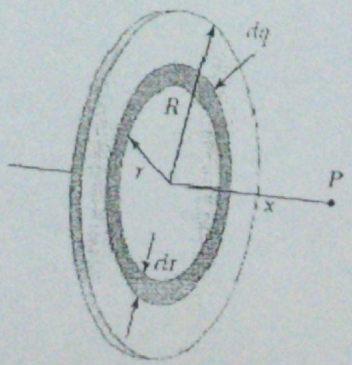
وهكذا، بحسب المعادلة (23.8)، فإن القوة المؤثرة على شحنة $-q$ موضوعة بالقرب من مركز الحلقة ستكون:

$$F_x = \frac{k_e x}{a^3} Qq = \frac{k_e q\, Q}{a^3} x$$

بما أن هذه القوة تمتلك شكل قانون هوك Hooke's law، فإن حركة الشحنة ستكون هارمونية بسيطة *simple harmonic*.

مثال (23.9): الحقل الكهربائي لقرص مشحون بانتظام

قرص ذو نصف قطر R يمتلك كثافة شحنة سطحية منتظمة σ، احسب الحقل الكهربائي عند نقطة P تقع على امتداد محور عمودي مركزي للقرص وتبعد مسافة x عن مركز القرص، الشكل (23.19).



الشكل (23.19)؛ المثال (23.9): قرص مشحون بانتظام ذو نصف قطر R. يتوجه الحقل الكهربائي عند نقطة P على المحور على امتداد المحور المركزي، المعامد لمستوي القرص.

الحل:

إذا ما نظرنا إلى القرص وكأنه مجموعة حلقات متمركزة، فإنه يمكننا استخدام النتيجة التي حصلنا عليها في المثال (23.8)، التي تعطي الحقل المتولد عن حلقة ذات نصف قطر a، ثم مجموع اسهامات كافة الحلقات المكونة للقرص.

إن الحلقة ذات نصف القطر r وذات العرض dr التي يبينها الشكل (23.19) تمتلك مساحة سطحية مساوية إلى:

$$2\pi r dr$$

وإن الشحنة على هذه الحلقة تساوي إلى مساحة هذه الحلقة مضروبة بكثافة الشحنة السطحية:

$$dq = 2\pi\sigma r dr$$

باستخدام هذه النتيجة في المعادلة التي تعطي E_x في المثال (23.8) مع استبدال a بـ r، فإننا سنحصل على الحقل العائد إلى الحلقة.

$$dE_x = \frac{k_e x}{(x^2 + r^2)^{3/2}}(2\pi\sigma r dr)$$

للحصول على الحقل الكلي عند P، نكامل هذه العلاقة على الحدود $r = 0$ حتى $r = R$، مع ملاحظة أن x هو ثابت. هذا يعطي:

$$E_x = k_e x\pi\sigma \int_0^R \frac{2r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$E_x = k_e x\pi\sigma \int_0^R (x^2 + r^2)^{-3/2} d(r^2)$$

$$E_x = k_e x\pi\sigma \cancel{\int_0^R} \left[\frac{(x^2 + r^2)^{-1/2}}{-1/2}\right]_0^R$$

$$E_x = 2\pi k_e\sigma\left(1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{-1/2}}\right)$$

إن هذه النتيجة صالحة من أجل كل قيم $x > 0$. يمكننا حساب الحقل قريباً من القرص على امتداد المحور بافتراض أن $x \ll R$، وهكذا، فإن العلاقة ضمن الأقواس تُختزل إلى واحد لتعطينا تقريب للحقل بجوار القرص؛ أي:

$$K_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad E_x = 2\pi k_e\sigma = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

حيث ϵ_0 هو نفوذية الفضاء الحر (الخلاء). في الفصل التالي سنحصل على نفس النتيجة من الحقل المتولد لوح متناه مشحونة بانتظام.